Решение задачи линейного программирования с n переменными

Г.Н. Асланова1, e-mail: gu_la_ga@mail.ru

Дагестанский государственный университет народного хозяйства

Аннотация. *Применение информационных технологий при решении прикладных задач намного упрощает процесс нахождения оптимального решения. В данной статье показано как можно решить задачу линейного программирования со многими переменными с использованием графического метода и табличного процессора MS Excel. При решении прикладных задач, в том числе и задач оптимизации, используется инструмент Поиск решения. Данный инструмент позволяет находить значения переменных при заданном критерии оптимальности, при выполнении заданных ограничений задачи.*

Ключевые слова: *информационные технологии, задача линейного программирования, графический метод, оптимизация, алгоритм, поиск решения*

Введение

Общая задача математического программирования (1)-(2) формулируется следующим образом: найти переменные задачи

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

которые обеспечивают экстремум целевой функции

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max(\min) \tag{1}$$

и удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, 2, \dots, l \\ \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \le (\ge) 0, i = l + 1, \dots, m. \end{cases} \tag{2}$$

Если при этом целевая функция и система ограничений линейны, то задача математического программирования называется задачей линейного программирования.

В данной статье рассматривается решение задачи линейного программирования с n переменными двумя методами – графическим методом и с применением табличного процессора MS Excel.

2. Решение задачи линейного программирования с n переменными графическим методом.

Графическим методом решаются задачи линейного программирования, записанные в каноническом виде и удовлетворяющие условию

$$n - r \leq 2, \tag{3}$$

где n – число неизвестных системы ограничений, а r – ранг системы векторов условий. Если уравнения системы ограничений линейно независимы, то ранг r равен числу уравнений системы.

Алгоритм графического метода решения ЗЛП со многими переменными (n>2):

1. Записать каноническую форму ЗЛП.
2. Выбрать две свободные переменные.
3. Выразить все остальные переменные через свободные, т.е. решить систему ограничений заданной задачи.
4. Выразить целевую функцию через свободные переменные.
5. Полученную двухмерную задачу решить графическим методом.
6. Найдя координаты оптимального решения двухмерной задачи, определяем остальные координаты оптимального решения исходной задачи.
7. Значение целевой функции на оптимальном плане двухмерной задачи совпадает со значением целевой функции на оптимальном плане исходной задачи.

Рассмотрим графический метод решения задачи линейного программирования с n переменными на следующем примере:

$$Z(X) = -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 7x_5 \to \min \tag{4}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 8x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 - 4x_5 = -4 \end{cases} \tag{5}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5 \tag{6}$$

(4)- целевая функция, (5) – система ограничений задачи, (6) – условия неотрицательности переменных. Условие (3) выполнимо, так как

$$n - r = 5 - 3 = 2, \tag{7}$$

и поэтому метод применим. Методом Жордана-Гаусса приведем систему уравнений-ограничений задачи к равносильной разрешенной, одновременно исключив разрешенные неизвестные из целевой функции (рис. 1).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
−1	$\boxed{1}$	1	2	−3	4
1	1	4	1	−8	3
0	1	1	0	−4	−4
−1	−1	1	3	7	0
−1	1	1	2	−3	4
2	0	3	−1	−5	−1
$\boxed{1}$	0	0	−2	−1	−8
−2	0	2	5	4	4
0	1	1	0	−4	−4
0	0	$\boxed{3}$	3	−3	15
1	0	0	−2	−1	−8
0	0	2	1	2	−12
0	1	0	−1	−3	−9
0	0	1	1	−1	5
1	0	0	−2	−1	−8
0	0	0	−1	4	−22

Рис. 1. Метод Жордана-Гаусса

Запишем задачу линейного программирования в преобразованном виде (8)-(10):

$$Z(X) = -x_4 + 4x_5 + 22 \to \min \tag{8}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - 3x_5 = -9 \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = -8 \end{cases} \qquad (9)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5 \qquad (10)$$

Отбросив в уравнениях-ограничениях (9) неотрицательные разрешенные неизвестные x_1, x_2, x_3 и заменив знак равенства знаками неравенства "$\leq$", получим вспомогательную задачу линейного программирования с двумя переменными (11)-(13):

$$Z(X) = -x_4 + 4x_5 + 22 \to \min \qquad (11)$$

$$\begin{cases} -x_4 - 3x_5 \leq -9 \\ x_4 - x_5 \leq 5 \\ -2x_4 - x_5 \leq -8 \end{cases} \qquad (12)$$

$$x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \qquad (13)$$

Теперь решаем задачу графическим методом, так это уже задача линейного программирования с двумя переменными (рис.2). Свободный член в целевой функции «22» на отыскание оптимального решения не влияет и учитывается только при вычислении значения целевой функции.

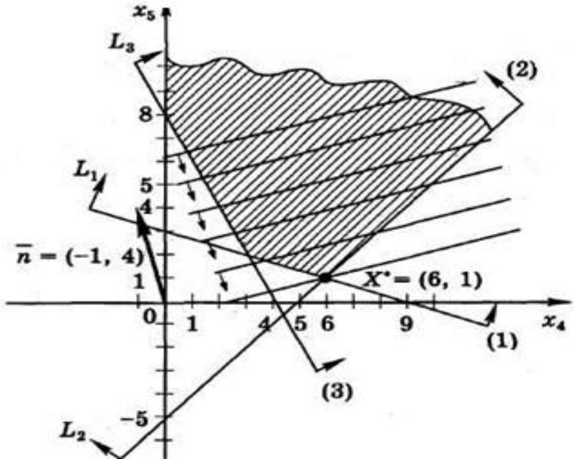

Рис. 2. Решение задачи графическим методом

Найдем оптимальное решение вспомогательной задачи

$$X^* = L_1 \cap L_2 :$$

$$+\begin{cases} -x_4 - 3x_5 = -9, (L_1) \\ x_4 - x_5 = 5, (L_2) \end{cases} \tag{14}$$

$$-4x_5 = -4 \tag{15}$$

$$x_5^* = 1, x_4^* = 6 \tag{16}$$

$$X^* = (6;1) \tag{17}$$

Вычисляем минимальное значение целевой функции

$$Z(X^*) = -1 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 22 = 20 \tag{18}$$

Далее необходимо найти решение исходной задачи. Для этого используем систему ограничений в разрешенном виде:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - 3x_5 = -9 \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = -8 \end{cases} \tag{19}$$

Далее вычислим:

$$\begin{cases} x_2^* = -9 + x_4^* + 3x_5^* = -9 + 6 + 3 = 0 \\ x_3^* = 5 - x_4^* + x_5^* = 5 - 6 + 1 = 0 \\ x_1^* = -8 + 2x_4^* + x_5^* = -8 + 12 + 1 = 5 \end{cases} \quad (20)$$

В итоге получаем решение:

$$X^* = (5;0;0;6;1) \quad (21)$$

В результате решения задачи графическим методом получили следующее решение:

$$\min Z(X) = 20;\ X^* = (5;0;0;6;1) \quad (22)$$

2. Решение задачи с применением табличного процессора MS Excel

При решении прикладных задач, в том числе и задач оптимизации, используется инструмент Поиск решения. Данный инструмент позволяет находить значения переменных при заданном критерии оптимальности, при выполнении заданных ограничений задачи. Решение задачи всегда необходимо начинать с составления модели.

Среди обычных задач, решаемых с помощью инструмента Поиск решения, можно выделить следующие:

– ассортимент продукции;
– штатное расписание;
– планирование перевозок;
– составление смеси;
– оптимальный раскрой материалов;
– оптимизация финансовых показателей.

Задачи, решаемые данным средством, должны обладать следующими общими свойствами:

– должна существовать единственная максимизируемая или минимизируемая цель;
– определены ограничения задачи;
– имеется набор входных значений – влияющих на ограничения и на оптимизируемые величины переменных.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**			
2	**ответ**						***Ограничения***		
3	огр 1	-1	1	1	2	-3		4	
4	огр 2	1	1	4	1	-8		3	
5	огр 3		1	1		-4		-4	
6							**Целевая ячейка Z(X):**		
7	цел функц	-1	-1	1	3	7			
8									

Рис. 3. Ввод исходной информации

Решим поставленную задачу в табличном процессоре MS Excel с применением инструмента Поиск решения. Каким образом можно ввести исходную информацию представлено на рис.3

В ячейку H7 введем формулу для расчета целевой функции: =СУММПРОИЗВ (B2:F2;B7:F7)

В ячейку G3 введем первое ограничение: =СУММПРОИЗВ($B$2:$F$2;B3:F3)

В ячейку G4 введем второе ограничение: = СУММПРОИЗВ($B$2:$F$2;B4:F4)

В ячейку G5 введем третье ограничение: = СУММПРОИЗВ($B$2:$F$2;B5:F5)

Для большей наглядности, быстрого ориентирования можно выделять цветом необходимые ячейки. В данном случае цветом выделены ячейки, в которых будет получено оптимальное решение. В окне Поиск решения вводим необходимую информацию как представлено на рис.4.

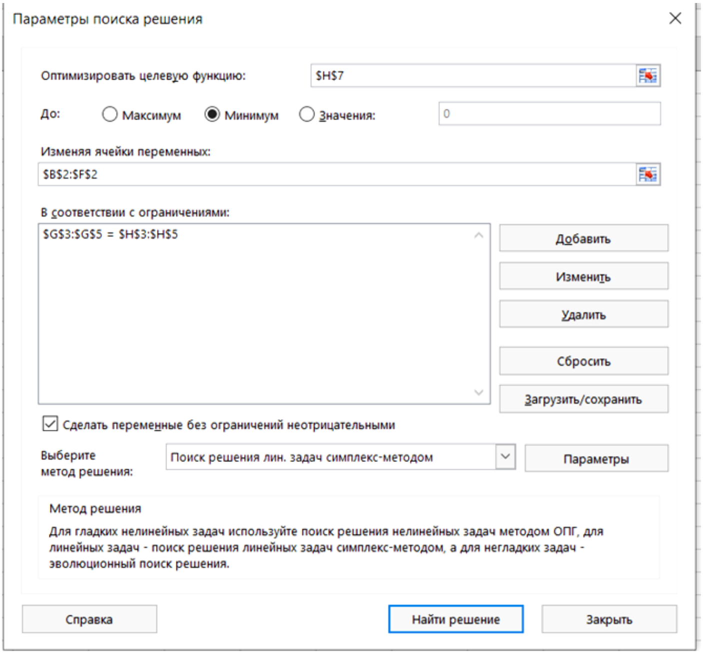

Рис. 4. Окно Поиск решения

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**		
2	**ответ**	**5**	**0**	**0**	**6**	**1**	***Ограничения***	
3	огр 1	-1	1	1	2	-3	4	4
4	огр 2	1	1	4	1	-8	3	3
5	огр 3		1	1		-4	-4	-4
6							**Целевая ячейка Z(X):**	
7	цел функц	-1	-1	1	3	7		**20**
8								

Рис. 5. Результат решения задачи в Ms Excel

Указываем, что переменные задачи неотрицательные. В списке методов решения выбираем «Поиск решения линейных задач симплекс-методом» (рис.4.)

Результаты решения данной задачи с применением инструмента Поиск решения отражены на рис.5. Как видим, решение полностью совпало с рассмотренным выше графическим методом.

Заключение

Результат решения рассматриваемой задачи графическим методом совпал с решением задачи в табличном процессоре. Однако намного быстрее и проще оказалось решить задачу в табличном процессоре.

В рассмотренном в статье примере показано, что информационные технологии визуализируют информацию, иллюстрируют динамику изучаемых процессов и явлений, упрощают процесс обучения. Применение информационных технологий при решении прикладных задач позволит повысить эффективность и качество обучения, позволит обучающимся мыслить самостоятельно, четко ставить цели и находить пути их достижения – это ценится значительно выше, чем просто владение знаний без применения их для решения конкретных проблем.

Список литературы

2. Афанасьев, М.Ю. Прикладные задачи исследования операций: Учебное пособие / М.Ю. Афанасьев, В.М. Матюшок, К.А. Багриновский. - М.: Инфра-М, 2018. - 672 с.
3. Просветов, Г. И. Анализ данных с помощью Excel. Задачи и решения / Г.И. Просветов. - М.: Альфа-пресс, 2013. - 160 с.
4. Черноруцкий, И.Г. Методы оптимизации. Компьютерные технологии / И.Г. Черноруцкий. - СПб.: BHV, 2011. - 384 с.